

# Olimpiada escolar de Matemática

## Examen

01. Si: a, b y c forman una proporción geométrica continua y:

$$\frac{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}{a^2 + b^2 + c^2} = 81^{-1}$$

Hallar "b".

- a) 15      b) 9      c) 3  
d) 27      e) 2

02. Una persona de 1.75 m. de altura observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de  $37^\circ$ . Después de avanzar 5 m. en dirección a la torre, desde el extremo superior de la torre se observa la parte superior de la persona con un ángulo de depresión de  $45^\circ$ . Calcular la altura de la torre.

- a) 15 m      b)  $15\sqrt{2}$  m      c) 15,75 m  
d) 16,75 m      e)  $15\sqrt{3}$  m

03. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se sabe que el perímetro es igual a 8m. Hallar la hipotenusa, sabiendo que se cumple:

$$(1 + \operatorname{Sen}A)(1 + \operatorname{Sen}C) = \frac{9}{8}$$

- a)  $\frac{9}{4}$       b)  $\frac{16}{9}$       c)  $\frac{9}{16}$   
d)  $\frac{16}{3}$       e)  $\frac{9}{2}$

04. Se tiene 2 torres de alturas h y H ( $h < H$ ).

Desde la base de la primera se ve la cima de la segunda con un ángulo de elevación  $\theta$  y desde la base de la segunda se divisa la cima de la primera con un ángulo de elevación  $\alpha$ . Si desde la cima de la mayor se ve la cima de la menor en un ángulo de depresión  $\phi$ . Hallar  $\operatorname{Tg}\phi$ . ( $\theta > \alpha$ )

- a)  $\operatorname{Tg}\theta - \operatorname{Tg}\alpha$       b)  $\operatorname{Tg}\alpha \cdot \operatorname{Tg}\theta$       c)  $\operatorname{Tg}^2\theta + 1$   
d)  $\operatorname{Tg}^2\alpha + \operatorname{Ctg}^2\theta$       e)  $\operatorname{Tg}\alpha - \operatorname{Tg}\theta$

05. En el desarrollo de la expresión:

$$(a^2 + a)^n (a^2 - 1)^{n+2} (1 - a^{-1})^n$$

Se obtuvo 21 términos en total. Hallar el segundo término.

- a)  $-2a^{38}$       b)  $-10a^{38}$       c)  $-20a^{38}$   
d)  $-3aa^{20}$       e)  $-2a^{10}$

06. Si:  $\frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \frac{7}{3}$ ;

hallar el valor de:  $\sqrt{\frac{b}{a}}$

- a)  $\frac{4}{25}$       b)  $\frac{25}{4}$       c)  $\frac{5}{4}$   
d)  $\frac{4}{5}$       e)  $\frac{8}{25}$



07. Dado el polinomio:  $P(x) = mx^2 + n$ , la diferencia de sus residuos que se obtiene al dividir por  $x-m$  y  $x-n$ , respectivamente es divisible por:

- a)  $n^2 + m$       b)  $m^2 + n$       c)  $n^2 + m^2$   
 d)  $n$                e)  $m - n$

08. Sean los números  $a, b, c > 0$  que están en progresión geométrica, podemos afirmar

que  $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$  es igual a:

- a)  $a^3 + b^3 + c^3$       b)  $\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{a} + \frac{c^3}{b}$   
 c)  $\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{a} + \frac{c^3}{a}$       d)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}$   
 e)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b}$

9. Simplificar:  $K = \operatorname{Sec}^4 x - \operatorname{Tg}^4 x - 2\operatorname{Tg}^2 x$

- a) -2      b) -1      c) 0  
 d) 1      e) 2

10. Determinar los valores de "m" para que el polinomio  $P(x) = x^2 + mx + m^2 + 6m$ , tenga valores negativos en  $x=0$  y en  $x=2$ .

- a)  $m \in \langle -8; 0 \rangle$   
 b)  $m \in \langle -6; 0 \rangle \cup \left\langle 4 - 2\sqrt{3}; \infty \right\rangle^+$   
 c)  $m \in \langle -6; -4 + 2\sqrt{3} \rangle$   
 d)  $m \in \left[ -4 + 2\sqrt{2}; \infty \right)^+$   
 e)  $m \in [-4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}]$

11. De un total de 320 personas; 80 hablan inglés, 61 hablan francés y 210 hablan sólo castellano. ¿Cuántos hablan sólo francés?

- a) 10      b) 20      c) 30  
 d) 40      e) 50

$$12. \text{ Dado: } \frac{1}{x+yi} + \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^2 = 1+i$$

donde  $i = \sqrt{-1}$ . Determinar "x-y", dando la solución en ese orden.

- a)  $\frac{1}{2}$       b)  $\frac{2}{3}$       c)  $\frac{3}{4}$   
 d)  $\frac{3}{5}$       e) 3

$$13. \frac{2}{x} = 0, \overline{abcdef} \quad y \quad \frac{5}{x} = 0, \overline{defabc}$$

Calcular "x", si se sabe que:

$$\overline{def} - \overline{abc} = 429$$

- a) 3      b) 4      c) 5  
 d) 6      e) 7

$$14. \text{ Si: } P(x) = ax^2 + b \quad y \quad P(P(x)) = 8x^4 + 24x^2 + c$$

Hallar el valor de  $a+b-c$ .

- a) 6      b) -3      c) -21  
 d) -18      e) -16

15. Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 &= 36 \\ 8x_1 + 27x_2 + 64x_3 + 125x_4 &= 216 \end{aligned}$$

El valor de  $x_1$  es:

- a) -3      b) -2      c) -1  
 d) 1      e) 3



16. Sea:  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  una matriz, entonces la matriz  $M^{2010}$  está representado por:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2010 & 1 & 0 \\ 2010 & 2010 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2010 & 1 & 0 \\ 2021055 & 2009 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2010 & 1 & 0 \\ 2017036 & 2010 & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2010 & 1 & 0 \\ 2019045 & 2010 & 1 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2008 & 1 & 0 \\ 2017036 & 2008 & 1 \end{bmatrix}$

17. Sea  $x, y, z$  una terna de números enteros tales que  $x+y+z=24$ ;  $x^2+y^2+z^2=210$ ;  $xyz=440$ . El mayor número de esta terna es:

- a) 5      b) 8      c) 11  
d) 15      e) 13

18. Dada la matriz  $P = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ , entonces el valor de  $P^{2009}$  es:

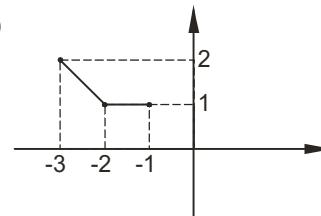
a)  $\alpha^{2009} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$       b)  $\alpha^{2008} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $2009 \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$       d)  $\alpha^{2009} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

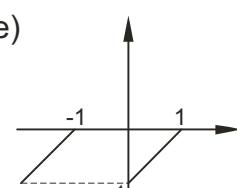
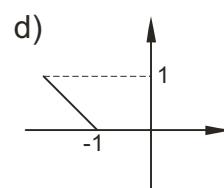
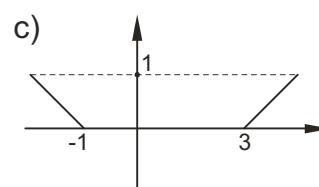
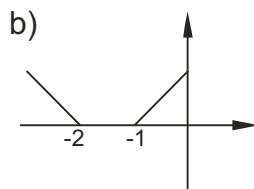
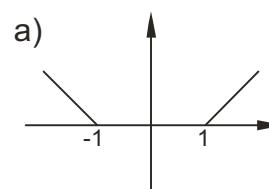
e)  $\alpha^{2009}$

19. La figura muestra la gráfica de la función:

$$y = f(x)$$



Entonces la figura que mejor representa la gráfica de  $f_{(-|x-1|-1)}$  es:



20. Dos campesinos poseen  $A$  m<sup>2</sup> y  $B$  m<sup>2</sup> de terrenos de cultivo, siendo  $B=4A$ . Cuando al primero le falta  $2/5$  y al segundo  $4/5$  para terminar de labrar sus terrenos, acuerdan contratar un peón por S/. 360 y terminar el resto del trabajo entre los tres en partes iguales. Al final, el campesino del terreno  $A$  aduce que no debe pagar y por el contrario, reclama un pago al campesino del terreno  $B$ . ¿Cuánto es el pago que reclama?

- a) 120      b) 140      c) 220  
d) 240      e) 260